УДК 111.1
ББК 87.21

КАЧЕСТВЕННАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА: ОНТОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Букин Дмитрий Николаевич

Кандидат философских наук, докторант кафедры философии
Волгоградского государственного университета
hetfieldukin@mail.ru, socphil@volsu.ru
Проспект Университетскаий, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Постижение бытия математического объекта далеко не всегда начинается с описания его количественных параметров – прежде чем ответить на вопрос «сколько?», необходимо задаться вопросом «что?». В статье показано, что качественный подход в математике применяется повсюду, на всех уровнях анализа, потому что любой математический объект должен быть осмыслен и определен прежде всего со своей качественной стороны.

Ключевые слова: онтологические категории, качество, количество, отношение, структура, математический объект.

Как известно, математика изучает прежде всего *количественные отношения* и *пространственные* формы мира – на это указывают не только философы (Энгельс), но и сами математики (Д'Аламбер, Гаусс и др.). В то же время уже из различных дефиниций самого количества – будь то гегелевское «чистое количество», не изменяющее качество сущего или ильенковская «объективная определенность качественно однородных явлений» – видно, что познанию количества всегда предшествует познание *качества*. Не являются исключением и абстрактные математические объекты. Ни один их них не может быть помыслен без качественных признаков – прежде чем считать, необходимо знать, *что* считать. Для онтологического исследования сущности математики это может оказаться весьма значимым: «Математика… не наука о количестве как таковом… Она есть *неколичественная* математика, то есть наука о количественно определенном *качестве*. Гуссерль мечтал о создании такой математики и в конце XIX века, а Гегель ясно понимал неколичественную сущность математики на 70–80 лет раньше» [1, с. 65].

Действительно, именно благодаря категории качества мы отличаем одно сущее от другого. Для идентификации какого-либо объекта далеко не всегда требуется владеть информацией о *количестве* составляющих его элементов, его числовых параметрах и т. п. – иногда вполне достаточно указать на то, что объект обладает тем или иным признаком, свойством или определенной структурой. Качественная определенность очень важна для математического познания, поскольку она создает сами *условия соизмеримости*, лежащей в основании математической рационализации. Соизмеримость, таким образом, – есть выражение *однокачественности* сущего и ее следует относить прежде всего не к количеству, а к качеству – «быть соизмеримым» еще не значит «быть посчитанным» или «имеющим величину».

По мнению И.С. Тимофеева, уже у Аристотеля, пусть и в неявной форме, *число* «может обойтись» без определяющих количественных оценок «больше» и «меньше» [8, с. 35]. Может показаться несколько необычным то, что такой традиционно «количественный» объект, как число, возникшее как познанное количество, подвергается качественному анализу. Тем не менее, этот момент выступает ключевым для исследования сущностных оснований целого ряда областей математики, поэтому его никак нельзя оставлять в стороне. Приведем пример.

Как известно, немецкий математик Г. Кантор уделял большое внимание бесконечным множествам. Им были найдены бесконечные множества, которые, выражаясь простым языком, «больше», чем другие бесконечные множества, которые в математике называют счетными. Но что означает это «больше»? Как сформулировать, на*сколько* одно бесконечное множество больше другого? Ясно, что обычным пересчетом здесь ничего не добьешься. С другой стороны, мы знаем, что в бесконечном множестве всех действительных чисел, в отличие от «обычного» бесконечного счетного множества, содержится еще и подмножество иррациональных чисел. В данном случае признак «иметь (не иметь) данное подмножество» указывает на *качественное* различие между представленными множествами. Числа, фиксирующие их мощности, были названы *трансфинитными*. Помимо того, что в отличие от привычных нам арифметических чисел, они образованы не только и не столько на количественной основе, от последних они также отличаются *качественно*. (Отметим, что в разделении более привычных нам целых чисел на «четные» и «нечетные» качество в некотором обобщенном виде также сохраняется, но основа такого различения будет все же количественной, требующей сравнения и проведения операции с числом «2»).

Возникшее в науке как обобщение результатов измерения понятие *величины,* также не во всех случаях анализа приобретает количественное значение. Так же, как и в случае с трансфинитными числами, существуют признаки, наличие или неналичие которых свидетельствует о *качественно* разных величинах («нескалярные» величины, например, отличаются от «скалярных»).

Переход от неопределенности к качественной определенности объекта математики зачастую принимает сложную, своеобразную форму *математического анализа*. Качественные оценки встречаются во многих его определениях. В частности, индивидуализация элемента структуры, на основе которой определяется интеграл Лебега, является сугубо качественной, поскольку «при нарушении свойства равномерной сходимости важен не “размер” эпсилон-трубки, за пределы которой “выплескивается” значение функции, а само это “выплескивание”» [1, с. 62].

В геометрии признак «иметь расстояние» является качественным, поскольку именно он позволяет выделять метрические пространства. От последних, в свою очередь, отличаются *топологические* пространства, у которых отсутствует такая количественная метрическая характеристика, как расстояние. Особый интерес вызывает свойство гомеоморфности фигур в топологии, благодаря которому, например, обыкновенная чайная кружка с ручкой и бублик (полноторий), отличимые внешне по количеству граней, вершин и ребер, *топологически эквивалентны*, то есть сохраняют качество с точки зрения гомеоморфизма (подобно тому, как, скажем, Иван и Петр качественно тождественны в гендерном отношении, но различаются в смысле возраста или профессии). Более того, математическая реальность включает примеры геометрических фигур, и вовсе *не имеющих площади*. Таким образом, во всех приведенных случаях снова работают качественные признаки «иметь» или «не иметь» (расстояние, меру, площадь, гомеоморфность и т. д.), а не количественные оценки типа «меньше-больше».

Важной особенностью качественного анализа в математике является то, что всякий математический объект – фигура, число, операция – рассматривается целостно, неделимо. Фиксируя самость сущего, которому еще только предстоит быть измеренным, посчитанным, квантифицированным и т. п., категория качества как бы очерчивает границы *целого* (как вещественного, так и идеального), сохраняющего эту свою самость. Мнение о том, что математики часто отвлекаются от качественной целостности объектов познания – ошибочно, особенно в тех случаях, когда дело касается отражения конкретной действительности путем *математического моделирования*. Пренебрежение неделимостью объекта в таких случаях может привести к абсурду. Так, например, говоря о какой-нибудь лопате в *единственном* числе, мы еще не употребляем термин «единица», но уже представляем это садоводческое орудие неделимым (вскопать землю можно только целой, *единой* лопатой, но никак не тремя ее отдельными третями). Точно так же можно предвидеть формирование системы алгебраических уравнений (еще не владея информацией о *количестве* уравнений и неизвестных, коэффициентах, свободных членах и т. д.), зная о том, что для какой-то совокупности однородных объектов (например, промышленных товаров) одновременно выполняются какие-либо условия (например, существует план расхода сырья, выпуска продукции и т. п.).

Несмотря на то, что «качество» и «целое» – близкие по значению категории, первая не исчерпывается второй и не сводится к ней – целое всего лишь есть «сущее, сохраняющее свое качество» [6, с. 121], но не более того. При этом важную роль в формировании содержания обеих категорий играет общенаучное понятие *структуры* (явное или неявное отождествление которого с рассматриваемыми всеобщими категориями также недопустимо). Действительно, постижение целостности объекта становится возможным только при условии отвлечения от количества элементов, его составляющих, и сосредоточении внимания на *отношениях* между ними. При этом качественное изменение может быть вызвано изменением структуры даже при неизменном составе элементов. Количество напрямую не зависит от отношений данного предмета с другими, но оно также не может быть определено вне его *структуры и качества,* делающих возможным количественное значение элементов и формируемых всегда по отношению к другим объектам. Мы не согласны с И.С. Тимофеевым, придерживающимся следующей точки зрения: «На известном уровне рассмотрения в определенных условиях целостность рассмотрения достигается благодаря выделению структуры. Но во многих случаях и на других уровнях целостное рассмотрение предметов познания (в том числе и вещей) достигается вообще вне структурного подхода, например путем выделения характерных общих для многих предметов свойств, признаков» [8, с. 83–84]. Целое – есть единство частей (элементов) и структуры, и само по себе выделение общих признаков еще не гарантирует, вообще говоря, оформленной целостности. Так, числа «1», «8», «13», объединенные принадлежностью к натуральному ряду, сами по себе не составляют целого, если только не задать с помощью них подмножество из трех чисел, являющееся множеством с заданным отношением между элементами, то есть структурой.

Очевидно, что уточнение содержания категории качества немыслимо без опоры на анализ содержания понятия *структуры*, выступающей онтологической определенностью для этой категории (любое другое упоминание об элементах, не связанное со структурой, так или иначе приводит к самому качеству, то есть к логическому «кругу»). Простейшим примером того, как развитие философского понятия структуры приводит к обогащению содержания категории качества, является введение в математическую науку понятия *множества*, понимаемого по Кантору, как «соединение в некое целое M определенных хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться «элементами» множества M)» [3, с. 173]. (Мы намеренно не приводим здесь расселовскую дефиницию, практически неотличимую от дефиниции *системы*). Действительно, не сводимое к другим понятиям, а значит, не подлежащее определению родово-видовым способом (как, кстати, и понятие числа), понятие множества, тем не менее, доступно познающему сознанию благодаря ряду онтологических категорий, среди которых особое место занимает и качество. В этом отношении канторовское определение представляется весьма удачным: количественная неопределенность (признак «состоять из m элементов» свидетельствует лишь о наличии частей *целого*, от характера элементов здесь отвлекаются) с избытком нивелируется качественной (признак «быть хорошо различимым»). Что же касается «обогащения» категории качества, то в данном случае оно происходит как раз благодаря появлению в науке новой структуры (примеры предшественников Больцано и Кантора не являются вполне подходящими – в античности у Аристотеля множество связывается с количеством, Евклид отказывает элементам в упорядоченности, Прокл и средневековые философы рассуждают не о множестве, а о последовательности), определяющей отношения элементов, соединенных в единое целое.

Более ярким примером выступает дальнейшее развитие понятия структуры в математике. Понимаемая как инвариантный аспект некоторой теоретической системы, она, согласно одному из направлений современной философии математики – математическому структурализму, – становится неотделимой от бытия многих математических объектов. Теперь структура сама понимается как абстрактный математический объект, состоящий из элементов, природа которых безразлична, и отношений этих элементов, упорядоченных определенным образом. На этом уровне рассмотрения количественные характеристики элементов зависят исключительно от тех отношений, в которых они находятся в данной структуре: «Общей чертой различных понятий, объединенных этим родовым названием, является то, что они применимы к множествам элементов, природа которых не определена. Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых находятся его элементы...; затем постулируют, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям (которые перечисляют и которые являются *аксиомами* рассматриваемой структуры). Построить аксиоматическую теорию данной структуры – это значит вывести логические следствия из аксиом структуры...» [2, с. 104–105]. Аксиомы и правила вывода определяют *качество* данной структуры в отличие от других структур, построенных из других аксиом с помощью других правил.

В частном случае такими элементами могут быть числа с их количественным значением, определяемым соответствующей структурой. Тогда говорят, что число находится в некотором *поле*. Слово «поле» применяется для описания системы, более общей, чем система чисел в арифметическом понимании. Поле чем-то напоминает систему арифметических чисел – в нем также заданы операции сложения, вычитания, умножения и деления, во всяком поле даже есть свои аналоги «0» и «1». Помимо поля, в настоящее время математика оперирует множеством других структур – лупы, группы, а также топологическими структурами, структурами порядка и т. д. Их открытие и изучение привело к усилению связей как между различными разделами математики, так и между математикой и прикладными областями (поля Галуа, например, активно применяются на практике для решения задач кодирования информации на ЭВМ). Таким образом, многообразие структур (причем лишь некоторые из них являются количественными) не могло не отразиться на появлении в математике такого *качества*, которое меняет само понимание предмета математики, позволяя получить более обобщенное и систематизированное знание о нем.

Вместе с тем, не стоит забывать: из того, что качество математического объекта познается с помощью определенной структуры не следует, что оно всегда понимается как определенная структура – качество в самом общем значении *не есть структура*. Более того, структура, выступающая онтологической определенностью категории качества, не является ее единственной определенностью в этом смысле. Качественная составляющая математической рациональности как специфической формы умопостижения *количественных* свойств и связей реальности, онтологически определяемая посредством понятия структуры, тесно связана и с *другими всеобщими категориями*. При этом речь не идет об апелляции к самому по себе разумеющемуся свойству системной рефлексивности онтологических категорий, согласно которому «анализ любой пары категорий заставляет рано или поздно обращаться к содержанию других категориальных пар… ибо, потянув за отдельную смысловую «категориальную ниточку», мы с необходимостью начинаем разматывать весь категориальный «клубок»» [4, с. 247]. Задача как раз состоит в том, чтобы не разматывая всего «клубка», обратить внимание на те категории, которые пересекаются с понятиями целого, системы, структуры и т. п. на правах *уточняющих* принципов*, конкретизирующих, проясняющих* содержание категории качества. На одной из таких категорий – категории *отношения* – следует остановиться подробней.

Ранее, понимая структуру как совокупность отношений, определяющую связь элементов *внутри* целого, мы использовали категорию отношения либо непосредственно (определяя, например, математическое поле), либо опосредованно, ссылаясь на процедуры отождествления и различения (см. анализ нестрогой дефиниции множества по Кантору). Другими словами, речь шла о *различении элементов* целого в противовес его тождества самому себе.

С другой стороны, в математике выделение объекта невозможно не только без его качественного различения, но и без его качественного *отождествления*. В этом смысле трудно переоценить значение таких математических отношений, как арифметическое равенство, алгебраическое тождество, сравнение по модулю в теории чисел, конгруэнтность в евклидовой геометрии и т. д. Появляясь на самых ранних этапах развития математики, они, в отличие от того же отношения *неравенства* типа «больше-меньше», апеллирующего к количеству, являют собой многообразие качества, развивая его содержание.

Еще один пример того, как развитие философского понятия отношения приводит к обогащению содержания категории качества, снова связан с теорией множеств. Как известно, в основании теоретико-множественного определения отношения лежит его трактовка, не поменявшаяся со времен Аристотеля, то есть как признака, одновременно принадлежащего нескольким объектам. Но как быть в ситуации, когда возникает вопрос: а принадлежит ли объект сам себе (в логике отношения такого рода называют унарными)? Абсурдный по отношению к числам, величинам и прочим математическим объектам, чья структура просто не позволяет его задать, для теории множеств он оказался не просто осмысленным, но и «роковым» – парадоксы, возникшие при попытке его разрешения, привели к настоящему кризису (так называемый «третий кризис оснований математики»).

Хорошо известно, что в начале XX в. теория множеств Кантора, хотя и не единодушно, была признана фундаментом всей математики. Каждый математический объект мог быть сформулирован в терминах теории множеств, то есть представлен как теоретико-множественный. Несмотря на то, что многим математикам казалось, что уже никто не в силах изгнать их «из рая, созданного Кантором» (Д. Гильберт), кризис все же грянул. Все началось с того, что Кантор попытался определить множество всех трансфинитных множеств. Согласно одной из его теорем, существует бесконечное число трансфинитных кардинальных множеств, и если такое «супермножество» существует, то должно существовать и множество всех его подмножеств, которое должно быть больше этого «супермножества». «Следовательно, заключил Кантор, должно существовать трансфинитное число, превосходящее наибольшее из трансфинитных чисел. Придя к столь нелепому выводу, Кантор сначала растерялся; однако он решил, что все множества можно разбить на *противоречивые* и *непротиворечивые,* и в 1899 г. сообщил об этом Дедекинду. Таким образом, множество всех множеств и соответствующее ему трансфинитное число попадали в разряд «противоречивых» – и тем самым исключались из рассмотрения» [7, с. 31].

Рассел, узнав об этом парадоксе, сначала усомнился в корректности (а точнее, в логичности) рассуждений Кантора. Пытаясь разобраться в происходящем, он сформулировал свой знаменитый парадокс, вошедший в историю мировой науки как *парадокс Рассела.* Помимо парадокса Рассела, к основаниям математики относятся и другие парадоксы начала XX в.: Ришара, Бери, Греллинга, Нельсона и др. Все они имеют одну и ту же логическую структуру и возникают как следствие некорректной, «круговой» самореференции определенных понятий, которые были названы Пуанкаре *непредикативными*.

Вышеназванные парадоксы вдохновили математиков на поиск непредикативных понятий и за пределами теории множеств – так, вскоре в основаниях классической математики было обнаружено одно из таких понятий – понятие *наименьшей верхней границы*. Оказалось, что помимо прочих значений оно включает и то, которое призвано обозначить, то есть саму наименьшую верхнюю границу. В начале XX в. в «Геттингенских лекциях» Пуанкаре отмечал: «Цермело высказал возражение против отказа от непредикативных определений, ссылаясь на то, что в таком случае пришлось бы отказаться от большей части математики, например, от доказательства существования корня алгебраического уравнения. Я могу говорить на эту тему ещё несколько часов, но не в силах решить проблему» [5, с. 192–193].

Так, благодаря появлению в математике и логике унарных конструкций стало возможным качественно, а не количественно зафиксировать границы существования новых объектов. Это в очередной раз показывает, что онтологическая категория отношения не только лежит в основании теоретико-множественных парадоксов и непредикативных структур, но и значительно конкретизирует содержание категории качества.

Подводя итог, отметим, что качественный подход в математике применяется повсюду, на всех уровнях анализа, потому что любой математический объект должен быть осмыслен и определен прежде всего со своей качественной стороны. Некоторые специальные математические методы даже получили название «качественных», то есть таких, которые сводятся к анализу уравнений, задач и т. п. в их отвлечении от количественной стороны и численных значений. Широкое применение они нашли в математической теории качества, кластерном анализе, теории групп и т. п.

Только после качественного выделения объекта математики можно говорить о его дальнейшем изучении, понимаемом как познание его *количества*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоусов, А. И. Категория количества в «Науке логики» Гегеля и ее интерпретация в свете современной математики / А. И. Белоусов // Число: сб. ст. – М. : МАКС Пресс, 2009. – С. 35–66.

2. Бурбаки, Н. Архитектура математики / Н. Бурбаки // Математическое просвещение. – 1960. – № 5. – С. 99–112.

3. Кантор, Г. Труды по теории множеств / Г. Кантор. – М. : Наука, 1985. – 430 с.

4. Миронов, В. В. Онтология и теория познания / В. В. Миронов, А. В. Иванов. – М. : Гардарики, 2005. – 447 с.

5. Пуанкаре, А. Геттингенские лекции / А. Пуанкаре // Последние работы. – М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – С. 151–202.

6. Сагатовский, В. Н. Философские категории. Ч. 1. Онтология. Авторский словарь / В. Н. Сагатовский. – СПб. : СПбНИУ ИТМО, 2011. – 127 с.

7. Светлов, В. А. Философия математики: основные программы обоснования математики XX столетия / В. А. Светлов. – М. : КомКнига, 2010. – 208 с.

8. Тимофеев, И. С. Методологическое значение категорий «качество» и «количество» / И. С. Тимофеев. – М. : Наука, 1972. – 216 с.

QUALITATIVE DEFINITENESS OF MATHEMATICAL OBJECT: ONTOLOGICAL ANALYSIS

Bukin Dmitriy Nikolaevich

Candidate of Philosophical Sciences,
Doctoral Student, Department of Philosophy,
Volgograd State University
hetfieldukin@mail.ru, socphil@volsu.ru
Prospect Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The comprehension of being of a mathematical object does not begin with the description of its quantitative parameters any time – before answering a question “how many?”, it is necessary to ask a question “what is?”. It is shown that a qualitative approach in mathematics is applied at all levels of analysis, because every mathematical object has to be comprehended and defined in its qualitative aspect first of all.

Key words: quality, quantity, relation, structure, ontological categories, mathematical object.