УДК 111.1
ББК 87.21

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РАЦИОНАЛЬНОСТЬ И ЕЕ ОНТОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ

Д.Н. Букин

Статья посвящена проблеме математической рациональности как важной культурной ценности человеческой цивилизации. Автором обосновывается применение категориального анализа для изучения онтологических оснований математической рациональности. Рассмотрена связь ключевых математических понятий с системой онтологических и модальных категорий.

Ключевые слова: *рациональность, математический объект, онтологические категории, модальные категории.*

Кризис рациональности как смыслообразующего принципа существования человека в мире, проявившийся уже во второй половине XX века, охватывает в настоящее время самые разные области социально-гуманитарного и естественнонаучного знания. Наряду с пониманием «рациональности вообще» как умопостигаемости объективно общего, по различным критериям выделяют множество ее типов: классический, неклассический, постнеклассический, отражающие эволюцию стандартов научности; исторические формы рациональности (античный, средневековый, нововременной и т. д.); также, в зависимости от сфер приложения, выделяют рациональность научную, коммуникативную, практическую и т. д.

Ядром научной рациональности, как она сложилась в эпоху классической науки, является постижение и «схватывание» объективных закономерностей реальности в особом языковом поле, особом тексте, а именно в математическом дискурсе. Следовательно, речь может идти о математическом подтипе рациональности, в общем случае не совпадающем с ее научным типом, но выступающем формообразующим для последнего. Действительно, уже неоплатоник Плотин называет «математическим» отвлеченное мышление, преодолевшее чувственный уровень познания мира на пути слияния с Единым. Рассуждая о нововременном типе рациональности, Н.С. Автономова отмечает: «Многие исследователи трактуют как революционное событие в человеческой истории возникновение новой формы рациональности: она возникает вследствие того, что математика, прежде всего в трудах Галилея, начинает использоваться для экспериментального исследования... тем самым очерчивается область новой науки – ее предметом становится наблюдаемое, исчислимое» [1, с. 16]. В.П. Визгин в своей работе «Становление научной рациональности в химии», опираясь на идеи Э. Кассирера, приходит к выводу о том, что становление и институционализация конкретной научной дисциплины связана с «подчинением математической дедукции множества эмпирических фактов» (цит. по: [12, с. 206]).

В этой связи некоторые ученые фактически понимают под рациональностью именно математический или логический ее тип. Так, М. Вебер в своей работе «Основные социологические понятия» отмечает: «Очевидность понимания может быть по своему характеру либо рациональной (то есть логической или математической), либо – в качестве результата сопереживания и вчувствования – эмоционально и художественно рецептивной... Наиболее рационально понятны, то есть непосредственно и однозначно интеллектуально постигаемы, прежде всего смысловые связи, которые выражены в математических или логических положениях... Любое истолкование подобного рационально ориентированного целенаправленного действия обладает... высшей степенью очевидности» [2, с. 603–604].

Подобное отождествление научной и математической рациональности привело к тому, что в философской литературе отсутствуют систематическая разработка проблемы оснований бытия и познания математических объектов. В этой связи одной из важнейших задач, стоящих перед современной философией математики, является всесторонний анализ онтологических оснований математической рациональности. Некоторые результаты данного анализа представлены в настоящей статье.

Итак, поскольку онтологические основания рациональности любого типа связаны не столько с характеристиками окружающей действительности, сколько с методом описания мира, в качестве данных оснований мы рассматриваем не внеположенный субъекту «сегмент реальности», субстанцию и т. п., а категориальную структуру мышления. Своеобразной «матрицей» рационального познания, позволяющей нам выявлять важные универсальные закономерности упорядоченности, функционирования и развития окружающего мира, выступает сетка онтологических категорий, конституирующая онтологический статус объектов любой природы, в данном случае – математических.

Вместе с тем начинать категориальный анализ онтологических оснований математической рациональности с определения бытийного статуса (природы) математического объекта было бы преждевременным – онтология как учение о сущем как таковом занимается вещами не в силу того, что они обладают определенными свойствами и вступают в определенные отношения, а в силу того, что они *существуют*. Поэтому математика может не интересовать вопрос о том, «чем “на самом деле” являются точки, прямые и числа», в то время как философ не может отказаться «от претензии... постижения “окончательной истины”, от разгадки внутренней сущности мира» [8, с. 23]. Но что понимается под существованием математического объекта «самого по себе» – бытие трансцендентной идеей Платона, «вещью в себе» Канта, феноменом чистого сознания Гуссерля? Г. Гутнер пишет: «Можно спросить, какова природа математических объектов или каков их онтологический статус... Наверное, каждая философская система попыталась определить свое отношение к математике и выяснить, как именно существуют и существуют ли вообще ее предметы» [5]. На наш взгляд, всякое рассуждение о математическом объекте следует в первую очередь начинать не с выяснения того, *как* он существует, а с вопроса о том, существует ли он вообще.

Отталкиваясь от знаменитого «cogito ergo sum» Декарта, мы можем заключить, что, мысля о математическом объекте, мы тем самым обнаруживаем факт своего существования «вместе с этим объектом». Позднее Гуссерль в «Начале геометрии» зафиксирует безусловную предданность последнего: «Математический объект абсолютно объективен, то есть полностью избавлен от эмпирической субъективности. Он... уже *редуцирован* к своему феноменальному смыслу, и его бытие с самого начала есть бытие-объектом для некоторого чистого сознания» [4, с. 12–13]. Данная мысль в той или иной форме находит отражение и в творчестве современных исследователей, среди которых можно выделить А. Бадью, разработавшего оригинальную «теорию презентации». В рамках данной теории автор, опираясь на современный математический аппарат, рассуждает о явленности сущего до проведения процедуры его «оформленности» в нечто, называемой «счетом». Анализируя работы французского ученого, О.А. Доманов приходит к следующему выводу: «В терминах способов быть до презентации мы имеем нечто неструктурированное, о чем мы даже не можем сказать, является ли оно единицей или множеством... при этом оказывается, что мы все же что-то знаем о сущем до презентации. А именно, мы знаем, что оно способно презентироваться... Другими словами, мы знаем, что оно способно быть» [6, с. 45]. В свою очередь, философский смысл существования математического объекта невозможно раскрыть без обращения к категории сущности, поскольку, как справедливо отметил Г.Д. Левин, «в форме существования сущность “живет”, в форме проявления – обнаруживает себя» [9, с. 218].

Таким образом, изучение проблемы онтологического статуса математического объекта начинается не с описания *способов* его бытия, а с обоснования его *способности* быть, существовать. Остановимся подробней на процедуре установления факта существования в математике.

Как известно, наиболее распространенный способ доказательства существования математического объекта заключается в его непосредственном построении. Данный способ широко применяется в алгебре, евклидовой геометрии, математическом анализе и т. д., а также является основополагающим в интуиционистской философии математики. В ходе его применения субъект стремится получить некоторый результат (явление), раскрывая при этом имплицитно содержащуюся в объекте определенность (сущность). Так, получая число «семь» в качестве значения предела последовательности, мы имеем дело с *явлением*. *Сущностью* же предела как математического объекта в этом случае является другая величина – номер, начиная с которого все члены последовательности попадают, согласно определению предела, в так называемую «эпсилон-окрестность».

Однако далеко не всегда удается доказать существование математического объекта, опираясь на конкретный алгоритм построения. Это касается, в частности, доказательств ряда важных математических теорем (например, теоремы Кантора, теоремы о пределе монотонной ограниченной последовательности и т. д.), а также сферы применения иррациональных и комплексных чисел. Известный математик Р. Курант пишет: «...попадаются и такие теоремы, для которых до настоящего времени не удалось дать иных доказательств, кроме косвенных. О некоторых из этих теорем можно даже сказать, что, по-видимому, по самой их природе прямые, конструктивные доказательства принципиально невозможны... Поэтому нечего удивляться, что школа “интуиционистов”... встретила упорное сопротивление и что даже наиболее ортодоксальные интуиционисты не всегда в состоянии жить согласно своим убеждениям» [8, с. 114]. Примечательно, что в случаях с неконструктивистским обоснованием существования математического объекта речь идет об указании не на какой-либо «явленный» единичный предмет (конкретное число, геометрическую фигуру и т. д.), а на предмет, явленный в своем небытии чем-то другим, то есть такой, само существование которого вытекает из закона исключенного третьего. Так, доказательство «от противного» теоремы о пределе монотонной ограниченной последовательности не «скрывает» сущности предела (хотя и не «привязывает» ее к конкретному числу), и явление представлено не конкретной величиной, а в виде абстрактного алгебраического символа. Теорема Кантора показывает, что сущностью несчетного множества является принципиальная «ненумеруемость» сосуществующих в единстве элементов, в то время как явлением, то есть некоей целостностью, воплощающей единство многого, может выступать, например, единичный отрезок и т. д.

Особую роль в структурировании математического мышления играют категории пространства и времени. Известный французский мыслитель, математик и инженер XIX века Ш. Фрейсине в свое время заметил: «Понятие о пространстве и времени играет первенствующую роль в образовании как математических, так и физических наук. Они не только заключаются в определениях главных предметов, рассматриваемых этими науками, но часто сами доставляют непосредственный материал для вычислений... Числа в арифметике и количества в алгебре имеют бесспорно отвлеченный характер; но, первоначально, они обозначали группы конкретных единиц, находящихся в логической зависимости от пространства и времени» [15, с. 7].

Указанная Фрейсинге «отвлеченность» чисел и «количеств» в математике свидетельствует о том, что одних понятий пространства и времени в любом случае недостаточно для раскрытия смысла данных математических объектов – необходимо дополнительное привлечение соответствующих предельно общих философских категорий. Рациональное есть установленная «соизмеримость» вещей по природе и в познании. Следовательно, центральное место в формировании структуры математической рациональности играют категории количества, качества и меры (как онтологической категории, отражающей взаимосвязь количественных и качественных изменений). Уже Аристотель, выделяя «размерные» и «счетные» количества, связывал первые с убыванием или прибавлением непрерывных характеристик бытия, а вторые – с его дискретными, «множественными» характеристиками. В.В. Миронов и А.В. Иванов считают, что «в каком-то смысле оппозиция размерного и счетного количеств связана с более фундаментальными качественными противоречиями бытия между “точкой” и “пространством”, прерывностью и непрерывностью...» [10, с. 156]. У Гегеля же «определенное количество» и есть число [3, с. 247], в то время как мера – «качественное количество» («единство и истина их обоих») [там же], исполняющее роль соединительного логического звена между категориально-понятийными комплексами, описывающими, с одной стороны, непосредственное бытие, и сферу сущности – с другой. Выход за пределы строго упорядоченных качественных и количественных параметров системы означает переход к другой структуре, появлению нового качественного образования. Примечательно, что в математике понятие меры весьма широко распространено и используется в таких разделах, как теория множеств, теория вероятностей, функциональный анализ и ряде других (там ее определяют как «длину множества» или «функцию множеств»). С точки зрения философии любопытен тот факт, что, принимая конкретные значения, скажем, «нуль» или «единица», мера соответствует качественно разным множествам («пустому», «универсальному» и т. д.)

Следует заметить, что, рассуждая о математических объектах (числах, множествах, фигурах и т. д.), нельзя забывать и об *отношениях*, задаваемых между ними и являющихся, в свою очередь, объектами математики. Одним из наиболее распространенных проявлений отношения в математике, имеющим колоссальное значение для науки в целом, является *функция*.

Характерным признаком философской категории отношения является то, что она взаимоопределяется только через категорию *свойства* и не может быть определена через род и видовое отличие. Именно через свойства наиболее полно раскрывается сущность отношения; и наоборот, именно характер отношения определяет те свойства объектов, которые проявляются как актуализированные формы сущего. Так, скажем, конкретный вид функциональной зависимости задает область определения и множество значений функции, а не наоборот. Вне отношения исходные объекты, детерминирующие его, становятся недоступными познанию, никак не проявляясь. Мы же, опираясь на рассуждения, изложенные выше, утверждаем факт существования отношения как построенного математического объекта (функции, статистической зависимости и т. д.), что и приводит нас с логической необходимостью к обоснованию существования носителей отношения, в качестве которых также могут выступать математические объекты.

Особое место среди существенных признаков онтологической категории отношения занимает ее системная рефлексивность, то есть способность «отражать» все другие категории, определяясь лишь в рамках их целостной системы. Отношение немыслимо вне системы таких категорий, как бытие, свойство, сущность, качество, количество и т. п., что наиболее ярко прослеживается именно в работе с математическими объектами. При этом отношение не просто обладает свойством системной рефлексивности – оно делает его возможным. Установление *отношения* между категориями выступает, в конечном итоге, залогом их легитимации, введения во всеобщий философский дискурс.

Таким образом, категории сущности и явления, пространства и времени, отношения и свойства, качества и количества, меры и т. п. выступают предельными рациональными «полюсами», конституирующими общий многомерный смысл бытия математического объекта.

С другой стороны, в традиции рефлексии над основаниями рациональности присутствует указание на то, что направление «вектора» рационального познания определяют, выступая основой особого категориального опосредования сущего, модальные характеристики необходимого, действительного и возможного. В.С. Швырев пишет: «Не надо забывать, что возможность или невозможность какого-либо положения дел с рационально-познавательной точки зрения представляют собой модальные характеристики, формулируемые, как это показано в логической семантике, относительно исходных правил того языкового каркаса, в котором выражается позиция рационального сознания» (цит. по: [11, с. 22]). Детальная проработка модального подхода в осмыслении бытия реализована в работах Г.Л. Тульчинского и М.Н. Эпштейна. Модальности классифицируются на три основные группы: бытийные (онтические), познавательные (эпистемические) и чистые (потенционные) – с последующим выделением двадцати модальных категорий (без учета восьми категорий, характеризуемых им как предмодальные и сверхмодальные). По мнению автора, в основе мышления и языка лежат именно бытийные (другие названия – онтические, алетические, истинностные) модальности действительного (ассерторические), возможного (проблематические), необходимого (аподиктические). На особый статус алетических модальностей в логике указывает Г.Л. Тульчинский (см.: [13]).

Очевидно, что система онтологических оснований математической рациональности не может не включать в себя подсистему модальных категорий необходимости, действительности и возможности. А.Ф. Кудряшев отмечает по этому поводу: «Различие математических высказываний по модальности является непреложным фактом, и выделение соответствующих модальных онтологий позволяет философски более квалифицированно подходить к пониманию самой сути математики и математического мышления» [7]. При этом любопытно, что в формировании математического дискурса наиболее заметную роль играют аподиктические и проблематические модальности. Первые, например, придают модус необходимости всем доказанным математическим утверждениям. Так, формулировка знаменитой теоремы Пифагора, часто приводимая в сокращенном виде, более явно и полно с логической точки зрения звучит так: «Сумма квадратов катетов *необходимо* равна квадрату гипотенузы» [14, с. 64]. Проблематические модальности возможного, в свою очередь, участвуют в формировании математических высказываний о мире возможного, то есть напрямую связаны с предметом теории вероятностей и математической статистики, а следовательно, и с моделированием сложных систем, функционирующих в условиях неопределенности и риска.

Далеко не столь однозначно ситуация обстоит с ассерторическими модальностями – они призваны закрепить онтологический статус математического объекта «как он есть», а это, как было показано выше, довольно сложная и специфическая проблема, связанная с установлением факта существования последнего. Интересное решение данной проблемы находим в работе А.Ф. Кудряшева: «Мир “Как (оно) есть на самом деле” весьма запутанный. Ориентироваться в нем помогает знание других миров и умение их различать» (см.: [7]). Другими словами, мы вновь возвращаемся к проблеме существования математического объекта, но для ее решения уже используем не категориальный анализ традиционных гипотетико-дедуктивных процедур, а установленные формальной логикой зависимости между основными алетическими модальностями. Так, в случае с доказанной теоремой о существовании какого-либо объекта модус необходимого автоматически означает обретение этим объектом модуса действительного, в то время как обратное в общем случае неверно (например, из равенства двух (нуля и единицы) значений величины и ее квадрата вовсе не следует их тождество, о чем свидетельствуют все прочие значения). Аналогично, из действительного следует возможное, но не наоборот. Так, когда-то из предположения о том, что гипотеза Пуанкаре может быть доказана, вовсе не следовало, что она доказана; однако, к счастью, Г. Перельман сделал возможным привести ее формулировку в модусе необходимого, дав миру ценный результат, представленный в модусе действительного.

Примечательно, что по ряду свойств модальные категории напоминают рассмотренные выше онтологические категории. Так, например, подобно фундаментальным онтологическим категориям, модусы возможного, действительного, необходимого являются бинарными, а также имеют предельный характер «всеобщности». В то же время, в отличие от логических категорий, модальные задают не «пространство» возможных рациональных смыслов математического объекта, а систему «вертикальных осей», где взаимодействие предельных модальных полюсов так или иначе определяет конкретную конфигурацию рационально созидаемого образа такого объекта. Так или иначе, модальности и онтологические атрибуты, не являясь тождественными категориальными феноменами, находятся в одной плоскости, выступая взаимодополнительными и коррелятивными ипостасями бытия математической рациональности.

Подводя итог всему вышеизложенному, отметим, что обретение общих оснований устойчивого мирового развития невозможно без переосмысления значимости математической рациональности как важнейшей культурной ценности человеческой цивилизации, необходимой для построения связной и полной картины мира. Прежде всего это касается вопросов прогнозирования и математического моделирования рисковых ситуаций, выступающих «естественной» средой функционирования и развития сложных человекоразмерных систем.

Экспликация онтологических оснований математической рациональности, проводимая с помощью категориального анализа, призвана существенно расширить возможности методологии рационального познания в целом. Другими словами, налицо необходимость построения замкнутой системы всеобщих философских категорий, выступающих «направляющими» процесса познания и обоснования существования мира идеальных объектов, граничащего с миром вещественным на условиях их глубочайшего взаимопроникновения. С нашей точки зрения, данную систему составляют атрибутивная и модальная подсистемы категорий. Первая включает такие предельные смысловые структуры сознания, отражающие и/или конструирующие математический объект, как бытие, сущность, явление, отношение, свойство, пространство, время, количество, мера и т. д. Вторая фундируется алетическими модальностями необходимого, действительного и возможного. При этом надо иметь в виду, что вышеупомянутый категориальный анализ онтологических оснований математической рациональности должен проводиться с учетом закономерностей трансформации содержания онтологических и гносеологических категорий и производных от них общенаучных понятий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автономова, Н. С. Рассудок, разум, рациональность / Н. С. Автономова. – М. : Наука, 1988. – 287 с.
2. Вебер, М. Избранное. Образ общества : сб. работ / М. Вебер. – М. : Юрист, 1994. – 704 с.
3. Гегель, Г. В. Ф. Энциклопедия философских наук. В 3 т. Т. 1. Наука логики / Г. В. Ф. Гегель. – М. : Мысль, 1974. – 452 с.
4. Гуссерль, Э. Начало геометрии / Э. Гуссерль, Ж. Деррида. – М. : Ad marginem, 1996. – 269 с.
5. Гутнер, Г. Онтология математического дискурса [Электронный ресурс] / Г. Гутнер. – Электрон. текстовые дан. – Режим доступа: http://www.teneta.ru/rus/ge/gutner_ontology_of_matematic.htm. – Дата обращения: 17.02.2010. – Загл. с экрана.
6. Доманов, О. А. Счет-за-одно (compte-pour-un) в онтологии А. Бадью / О. А. Доманов // Современная онтология II : материалы Междунар. науч. конф. «Бытие как центральная проблема онтологии», 25–29 июня 2007 г., г. Санкт-Петербург. – СПб. : Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2007. – С. 40–48.
7. Кудряшев, А. Ф. Модальные онтологии в математике [Электронный ресурс] / А. Ф. Кудряшев. – Электрон. текстовые дан. – Режим доступа: http://www.philosophy.ru/library/fm/kudrya.html. – Дата обращения: 03.02.2010. – Загл. с экрана.
8. Курант, Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. – М. : МЦНМО, 2004. – 568 с.
9. Левин, Г. Д. Философские категории в современном дискурсе / Г. Д. Левин. – М. : Логос, 2007. – 224 с.
10. Миронов, В. В. Онтология и теория познания: учебник / В. В. Миронов, А. В. Иванов. – М. : Гардарики, 2005. – 447 с.
11. Рациональность на перепутье. В 2 кн. Кн. 1. – М. : Рос. полит. энцикл., 1999. – 368 с.
12. Рациональность на перепутье. В 2 кн. Кн. 2. – М. : Рос. полит. энцикл., 1999. – 464 с.
13. Тульчинский, Г. Л. Смена онтологической парадигмы: от сущего к потенциальному / Г. Л. Тульчинский // Парадигма: Очерки философии и теории культуры : [сб. тр.] по материалам Междунар. науч. конф. «Онтология в XXI веке: проблемы и перспективы», 26–28 июня 2006 г. – СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. – Вып. 6. – С. 12–23.

14. Формальная логика: учебник / под ред. И. Я. Чупахина, И. Н. Бродского. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 359 с.

15. Фрейсине, Ш. Очерки по философии математики / Ш. Фрейсине. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 170 с.

MATHEMATICAL RATIONALITY AND ITS ONTOLOGICAL BASIS

D.N. Bukin

The article deals with the problem of mathematical rationality as an important cultural value of human civilization. The author substantiates the categorical analysis application to the study of mathematical rationality ontological basis. The relation of key mathematical concepts and system of ontological and modal categories are considered.

Key words: *rationality*, *mathematical object*, *ontological categories*, *modal categories.*